Printed Pages – 7

I-237

B.Sc. (Part-III) Supplementary/Special Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न/इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question/unit. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) सिद्ध करो कि एक समूह G की सभी स्वाकारिताओं का समूह द्विआधारी संक्रिया के रूप में फलनों के संयोजन के सापेक्ष एक समूह की रचना करता हैं।

Prove that the set of all automorphisms of a group forms a group with respect to compositions of functions as the composition.

(b) सिद्ध कीजिए कि G पर संयुग्मता सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।

Prove that conjugacy is an equivalence relation on G.

(c) माना G एक परिमित समूह है। तब सिद्ध कीजिए कि $C_a = \dfrac{O(G)}{O\{N(a)\}}$ अर्थात् G में a के संयुग्मों अवयवों की संख्या G में a के प्रसामान्यक के सूचकांक के बराबर होती है।

Let G be a finite group. Then prove that the number of elements conjugate to *a* in G is the index of the normalizer of *a* in G that is $C_a = \dfrac{O(G)}{O\{N(a)\}}$.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिए कि एक क्रम विनिमेयी वलय की प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब एक क्रम विनिमेयी वलय होता है।

Prove that every homomorphic image of a commutative ring is a commutative ring.

(b) सिद्ध कीजिए कि एक वलय R से वलय R′ तक एक समाकारिता की अष्टि R की एक गुणजावली होती है।

If $f : R \xrightarrow{\text{into}} R'$ is a homomorphism then prove that Kernel of f is an ideal of R.

(c) वलयों की समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem on homomorphism of rings.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) दर्शाइये कि सदिश समिष्ट V(F) के किसी अरिक्त उपसमुच्चय W के सदिश समिष्ट V(F) का उपसमिष्ट होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि W सदिश योग एवं अदिश गुणन के सापेक्ष संवृत है।

Show that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset W of a vector space V(F) to be a subspace of V is

that W is closed under vector addition and scalar multiplication.

(b) दर्शाइये कि $V_2(F)$ के सदिश (a_1, a_2) एवं (b_1, b_2) जहाँ F, सम्मिश्र संख्याओं का क्षेत्र है, रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं यदि $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Show that the vectors (a_1, a_2) and (b_1, b_2) of $V_2(F)$, where F is the field of complex numbers are linearly independent if

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

(c) सिद्ध कीजिए कि परिमिततः जनित सदिश समिष्ट V(F) का प्रत्येक रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय V के आधार का भाग होता है।

Show that every linearly independent subset of a finitely generated vector space V(F) forms a part of a basis of V.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) एक रैखिक प्रतिचित्रण $T : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ जो इस प्रकार परिभाषित है कि

$T(a, b) = (a - b, b - a, -a);\ \forall\ a, b \in R$

तो दिखाओ कि T रैखिक है एवं T का परास, कोटि, शून्य समिष्ट एवं शून्यता ज्ञात कीजिए।

A linear transformation $T : V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ is defined by $T(a, b) = (a - b, b - a, -a);\ \forall\ a, b \in R$ then show that T is linear and find the range, rank, null space and nullity of T.

(b) कोटि शून्यता प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove rank nullity theorem.

(c) दिखाइये कि निम्न आव्यूह A विकर्णनीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) उदाहरण सहित आन्तर-गुणन समिष्ट को परिभाषित कीजिए।

Define inner product space with an example.

(b) दर्शाइये कि सदिशों का समुच्चय $S = \{(1, 2, 2), (2, -2, 1), (2, 1, -2)\}$ R^3 में लांबिक है।

Show that the set of vectors $S = \{(1, 2, 2), (2, -2, 1), (2, 1, -2)\}$ is orthogonal in R^3.

(c) ग्राम स्मिथ प्रक्रिया का प्रयोग कर (1, 1, –1, 1), (1, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 1) से जनित उपसमिष्ट का प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए।

Use the Gram-Schmidt process of orthonormalisation to obtain an orthonormal basis of subspace generated by (1, 1, –1, 1), (1, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 1).